Увод у математичку логику, септембар 2008. *3. септембар 2008.*

1 Испитати који елементи низа исказних формула: $A_0 \equiv p,\ A_1 \equiv (q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p,\ A_n \equiv A_{n-2} \Leftrightarrow A_{n-1},\ n \geq 2$, су таутологије, односно контрадикције.

Решење: Нека је I_1 произвољна интерпретација за коју је $I_1(p) = \top$, а I_2 произвољна интерпретација за коју је $I_2(p) = \bot$. Тада је $I_1(A_0) = \top$, а $I_2(A_0) = \bot$. $I_1(A_1) = I_1((q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p) = I_1(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow I_1(\neg p) = (I_1(q) \Rightarrow (I_1(p) \Rightarrow I_1(q))) \Rightarrow \bot = \top \Rightarrow \bot = \bot$ и слично $I_2(A_1) = I_2(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow I_2(\neg p) = I_2(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \top = \top$. Сада је јасно $I_1(A_2) = I_2(A_2) = \bot$, те је формула A_2 контрадикција. Покажимо индукцијом да важи $I_1(A_{3n}) = \top$, $I_1(A_{3n+1}) = \bot$ $I_1(A_{3n+2}) = \bot$ $I_2(A_{3n}) = \bot$, $I_1(A_{3n+1}) = \top$ $I_1(A_{3n+2}) = \bot$. Одатле ће да следи да су све формуле A_{3n+2} контрадикције, а да остале формуле нису ни таутологије ни контрадикције. Базу индукције смо већ доказали. Претпоставимо да тврђење важи за n и рачунајмо вредности за $n+1$. $I_1(A_{3n+3}) = I_1(A_{3n+2}) \Leftrightarrow I_1(A_{3n+1}) = \bot \Leftrightarrow \bot = \top$. Слично израчунамо и остале вредности. □

2 Показати да у исказном рачуну важи $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$.

Решење: Показаћемо три леме.

Лема 1: $A \wedge B \vdash A$, тј. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash A$.

1.	хипотеза	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
2.	$A, \neg A \vdash B$	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
3.	теорема	$(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg A)$
4.	МП(2,3)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg A$
5.	МП(1,4)	$\neg\neg A$
6.	теорема	$\neg\neg A \Rightarrow A$
7.	МП(5,6)	A.

Лема 2: $A \wedge B \vdash B$, тј. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash B$.

1.	хипотеза	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
2.	аксиома 1	$\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
3.	теорема	$(\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg B)$
4.	МП(2,3)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg B$
5.	МП(1,4)	$\neg\neg B$
6.	теорема	$\neg\neg B \Rightarrow B$
7.	МП(5,6)	B.

Лема 3: $A, B \vdash A \wedge B$, тј. $A, B \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B)$.

1.	хипотеза	A
2.	хипотеза	B
3.	теорема	$B \Rightarrow \neg\neg B$
4.	МП(2,3)	$\neg\neg B$
5.	$A, A \Rightarrow B \vdash B$	$A \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$
6.	теорема	$((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B))$
7.	$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C (5,6)$	$A \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B))$
8.	МП(1,7)	$\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$
9.	МП(4,8)	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$.

Доказујемо сад тврђење.

1.	хипотеза	$(A \wedge B) \wedge C$
2.	Лема 1	$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge B)$
3.	МП(1,2)	$A \wedge B$
4.	Лема 2	$((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow C$
5.	МП(1,4)	C
6.	Лема 1	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
7.	МП(3,6)	A
8.	Лема 2	$(A \wedge B) \Rightarrow B$
9.	МП(3,8)	B
10.	Лема 3	$B \Rightarrow (C \Rightarrow (B \wedge C))$
11.	МП(9,10)	$C \Rightarrow (B \wedge C)$
12.	МП(5,11)	$B \wedge C$
13.	Лема 3	$A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C)))$
14.	МП(7,13)	$(B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
15.	МП(12,14)	$A \wedge (B \wedge C)$

□

3 Ако у Буловој алгебри важи $x \leq y,\ u \leq v$, показати да тада важи и $x \vee u \leq y \vee v$.

Решење: Како је $x \leq y$, то је $x \vee y = y$, а како је $u \leq v$, то је $u \vee v = v$. Сада је $(x \vee u) \vee (y \vee v) = (x \vee y) \vee (u \vee v) = y \vee v$, па је $x \vee u \leq y \vee v$. □

4 Наћи произвољан модел и контрамодел коначног домена за формулу: $F \equiv \forall x \forall y \forall z (p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z))$.

Решење: <u>Модел</u> Нека је $\mathbb{D}_1 = (\mathbb{N}, I^L)$ структура дефинисана са $I^L(p) = p_I,\ I^L(f) = f_I,\ I^L(g) = g_I$, где:

$$\begin{aligned} p_I(a,b) = \top & \quad \text{ако и само ако} \quad \ldots \text{ (ставимо било шта)} \\ f_I(a,b) = a & \\ g_I(a,b) = a. & \end{aligned}$$

Докажимо да је $\mathbb{D}_1 \vDash F$. Претпоставимо супротно. Тада постоји валуација $v : Var \to \mathbb{N}$ тако да је $I_v(F) = \bot$. По дефиницији тада постоји валуација $v' \sim_x v$ тако да је $I_{v'}(\forall y \forall z(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z))) = \bot$. Даље постоји валуација $v'' \sim_y v'$ тако да је $I_{v''}(\forall z(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z))) = \bot$. И коначно, постоји валуација $v''' \sim_z v''$ тако да је $I_{v'''}(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z)) = \bot$. Нека је $v'(x) = m \in \mathbb{N}$. Тада је $v''(x) = v'(x) = m$ и нека је $v''(y) = n$. Даље је $v'''(x) = v''(x) = m$, $v'''(y) = v''(y) = n$ и нека је $v'''(z) = l$. Добијамо: $p_I(f_I(m,n),l) \Rightarrow p_I(g_I(m,n),l) = \bot$, тј. $p_I(m,l) \Rightarrow p_I(m,l) = \bot$. Контрадикција. Ово доказује да $\mathbb{D}_1$ јесте модел за формулу F.

<u>Контрамодел</u> Нека је $\mathbb{D}_2 = (\{\alpha,\beta\}, I^L)$ структура дефинисана са $I^L(p) = p_I,\ I^L(f) = f_I,\ I^L(g) = g_I$, где:

p_I	α	β
α		$\top$
β		$\bot$

(где је празно може било шта)

$$\begin{aligned} f_I(a,b) = a, & \qquad a,b \in \{\alpha,\beta\} \\ g_I(a,b) = b, & \qquad a,b \in \{\alpha,\beta\}. \end{aligned}$$

Докажимо да је $\mathbb{D}_2 \nvDash F$. Претпоставимо супротно. Тада за све валуације $v : Var \to \mathbb{N}$ важи $I_v(F) = \top$. По дефиницији тада за све валуације $v' \sim_x v$ важи $I_{v'}(\forall y \forall z(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z))) = \top$. Даље за све валуације $v'' \sim_y v'$ важи $I_{v''}(\forall z(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z))) = \top$. И коначно, за све валуације $v''' \sim_z v''$ важи $I_{v'''}(p(f(x,y),z) \Rightarrow p(g(x,y),z)) = \top$. Узмимо $v'(x) = \alpha$. Тада је $v''(x) = v'(x) = \alpha$ и узмимо $v''(y) = \beta$. Даље је $v'''(x) = v''(x) = \alpha$, $v'''(y) = v''(y) = \beta$ и узмимо $v'''(z) = \beta$. Добијамо: $p_I(f_I(\alpha,\beta),\beta) \Rightarrow p_I(g_I(\alpha,\beta),\beta) = \top$, тј. $p_I(\alpha,\beta) \Rightarrow p_I(\beta,\beta) = \top$. Контрадикција. Ово доказује да $\mathbb{D}_2$ јесте контрамодел за формулу F. $\square$

5 Методом резолуције показати ваљаност формуле $F \equiv (H \wedge K) \Rightarrow L$, где је:

$$\begin{aligned} H & \equiv \forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (q(f(x,y),z) \vee q(x,z))), \\ K & \equiv \forall y p(a,y) \wedge \forall y \neg q(a,y), \\ L & \equiv \exists y \exists z q(f(a,y),z). \end{aligned}$$

Решење: Хоћемо формулу $\neg F = H \wedge K \wedge \neg L$ да представимо у пренекс форми.

$$\begin{aligned} \neg F & = H \wedge K \wedge \neg L = \\ & = \forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (q(f(x,y),z) \vee q(x,z))) \wedge \forall y p(a,y) \wedge \forall y \neg q(a,y) \wedge \neg \exists y \exists z q(f(a,y),z) = \\ & = \forall x \exists y (\neg p(x,y) \vee \exists z (q(f(x,y),z) \vee q(x,z))) \wedge \forall y p(a,y) \wedge \forall y \neg q(a,y) \wedge \forall y \forall z \neg q(f(a,y),z) = \\ & = \forall x [\ \exists y \exists z (\neg p(x,y) \vee q(f(x,y),z) \vee q(x,z)) \wedge p(a,x) \wedge \neg q(a,x) \wedge \forall z \neg q(f(a,x),z)\ ] = \\ & = \forall x \exists y \exists z [\ (\neg p(x,y) \vee q(f(x,y),z) \vee q(x,z)) \wedge p(a,x) \wedge \neg q(a,x) \wedge \forall z \neg q(f(a,x),z)\ ] = \\ & = \forall x \exists y \exists z \forall t [\ (\neg p(x,y) \vee q(f(x,y),z) \vee q(x,z)) \wedge p(a,x) \wedge \neg q(a,x) \wedge \neg q(f(a,x),t)\ ]. \end{aligned}$$

Увођењем сколемових функција $y \mapsto g(x)$ и $z \mapsto h(x)$ добијамо клаузну форму:

$$\forall x \forall t [\ (\neg p(x,g(x)) \vee q(f(x,g(x)),h(x)) \vee q(x,h(x))) \wedge p(a,x) \wedge \neg q(a,x) \wedge \neg q(f(a,x),t)\ ].$$

На њу примењујемо метод резолуције.

$C_1 = \{\neg p(x_1,g(x_1)), q(f(x_1,g(x_1)),h(x_1)), q(x_1,h(x_1))\}$
$C_2 = \{p(a,x_2)\}$
$C_3 = \{\neg q(a,x_3)\}$
$C_4 = \{\neg q(f(a,x_4),t_4)\}$

$C_5 = \{q(f(a,g(a)),h(a)), q(a,h(a))\}$	$Res(C_1,C_2,1,1)$	$[x_1 \mapsto a,\ x_2 \mapsto g(a)]$
$C_6 = \{q(f(a,g(a)),h(a))\}$	$Res(C_3,C_5,1,2)$	$[x_3 \mapsto h(a)]$
$C_7 = \emptyset$	$Res(C_4,C_6,1,1)$	$[x_4 \mapsto g(a),\ t_4 \mapsto h(a)]$

Како смо добили празну клаузу то је уочена клаузна форма незадовољива, а тиме је и формула $\neg F$ незадовољива, па је F ваљана. $\square$

6 Методом таблоа показати ваљаност формуле $H \Rightarrow K$, где је:

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow q(x,y)) \wedge \forall x \exists y p(x,y) \wedge \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg s(x,y)) \wedge \forall x \exists y q(x,y),\\
K &\equiv \forall x \forall y (s(x,y) \Rightarrow \neg p(x,y)) \wedge \exists x q(a,x) \wedge \exists x p(b,x).
\end{aligned}
$$

Решење:

$1\ \mathcal{F}\ H \Rightarrow K$

$2(1)\ \mathcal{T}\ H$

$3(1)\ \mathcal{F}\ K$

$4(2)\ \mathcal{T}\ \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$

$5(2)\ \mathcal{T}\ \forall x \exists y p(x,y) \wedge \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg s(x,y)) \wedge \forall x \exists y q(x,y)$

$6(5)\ \mathcal{T}\ \forall x \exists y p(x,y)$

$7(5)\ \mathcal{T}\ \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg s(x,y)) \wedge \forall x \exists y q(x,y)$

$8(7)\ \mathcal{T}\ \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg s(x,y))$

$9(7)\ \mathcal{T}\ \forall x \exists y q(x,y)$

$\swarrow \qquad \searrow$

$10(3)\ \mathcal{F}\ \forall x \forall y (s(x,y) \Rightarrow \neg p(x,y))$

$12(10)\ \mathcal{F}\ \forall y (s(c,y) \Rightarrow \neg p(c,y))$

$13(12)\ \mathcal{F}\ s(c,d) \Rightarrow \neg p(c,d)$

$14(13)\ \mathcal{T}\ s(c,d)$

$15(13)\ \mathcal{F}\ \neg p(c,d)$

$16(15)\ \mathcal{T}\ p(c,d)$

$17(4)\ \mathcal{T}\ \forall y (p(c,y) \Rightarrow q(c,y))$

$18(17)\ \mathcal{T}\ p(c,d) \Rightarrow q(c,d)$

$\swarrow \qquad \searrow$

$19(18)\ \mathcal{F}\ p(c,d)$

$\times(16,19)$

$20(18)\ \mathcal{T}\ q(c,d)$

$21(8)\ \mathcal{T}\ \forall y (q(c,y) \Rightarrow \neg s(c,y))$

$22(21)\ \mathcal{T}\ q(c,d) \Rightarrow \neg s(c,d)$

$\swarrow \qquad \searrow$

$23(22)\ \mathcal{F}\ q(c,d)$

$\times(20,23)$

$24(22)\ \mathcal{T}\ \neg s(c,d)$

$25(24)\ \mathcal{F}\ s(c,d)$

$\times(14,25)$

$11(3)\ \mathcal{F}\ \exists x q(a,x) \wedge \exists x p(b,x)$

$\swarrow \qquad \searrow$

$26(11)\ \mathcal{F}\ \exists x q(a,x)$

$28(9)\ \mathcal{T}\ \exists y q(a,y)$

$29(28)\ \mathcal{T}\ q(a,e)$

$30(26)\ \mathcal{F}\ q(a,e)$

$\times(29,30)$

$27(11)\ \mathcal{F}\ \exists x p(b,x)$

$31(6)\ \mathcal{T}\ \exists y p(b,y)$

$32(31)\ \mathcal{T}\ p(b,f)$

$33(27)\ \mathcal{F}\ p(b,f)$

$\times(32,33)$

$\square$