Увод у математичку логику, Септембар 2015.

1. На Острву верника и неверника (верници увек говоре истину, неверници увек лажу) становници A и B су музичари. Познато је да сваки од становника A и B свира или трубу или тромбон. A и B, као и њихови пријатељи C и D, су дали следеће изјаве:

A: Ако сам ја трубач, онда је B тромбониста.

B: A је или верник или тромбониста.

C: Тачно један од A и D је верник.

D: Ако је A верник, онда је и C верник.

Шта можемо да закључимо?

Решење. Означимо са p исказ "A је трубач.", а са q исказ "B је трубач." Тада $\neg p$ и $\neg q$ редом значе "A је тромбониста." и "B је тромбониста." Из датих изјава имамо:

$$a \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q) = 1 \tag{1}$$

$$b \Leftrightarrow (a \veebar \neg p) = 1 \tag{2}$$

$$c \Leftrightarrow (a \veebar d) = 1 \tag{3}$$

$$d \Leftrightarrow (a \Rightarrow c) = 1 \tag{4}$$

Коментаришемо по слову a. Ако је $a = 1$, тада из (3) имамо да је $c = \neg d$, а из (4) да је $d = c$, што је контрадикција.

Дакле, $a = 0$, па из (1) имамо да је $p = 1$ и $q = 1$. Из (2) је тада $b = 0$. Из (4) је $d = 1$, па је коначно из (3) $c = 1$. Према томе, A, B су неверници и трубачи, а C и D су верници. $\dashv$

2. Нека су A, B, C произвољни скупови. Доказати: $A \cap (B \Delta C) = B$ акко $A \cap C = \emptyset$ и $B \subseteq A$.

Решење. Имамо да је $\chi_{A\cap(B\Delta C)} = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C$. Приметимо да је $A \cap C = \emptyset$ еквивалентно са $\chi_A\chi_C = 0$, а $B \subseteq A$ је еквивалентно са $B \cap A = B$, тј. $\chi_A\chi_B = \chi_B$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $A \cap (B\Delta C) = B$. Тада је очигледно $B \subseteq A$, па је $\chi_A\chi_B = \chi_B$. Убацујући ову једнакост у $\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C = \chi_B$ добијамо $\chi_A\chi_C = 0$, одакле је $A \cap C = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо $B \subseteq A$ и $A \cap C = \emptyset$, тј. $\chi_A\chi_B = \chi_B$ и $\chi_A\chi_C = 0$. Користећи ове једнакости добијамо: $\chi_{A\cap(B\Delta C)} = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C = \chi_B + 0 = \chi_B$, одакле следи $A \cap (B\Delta C) = B$. $\dashv$

3. Нека су $f, g : X \longrightarrow Y$. Доказати: $f = g$ акко $f^{-1}[g[A]] \supseteq A$ за све $A \subseteq X$.

Решење. ($\Rightarrow$) Треба да докажемо $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$, за све $A \subseteq X$. Нека је $A \subseteq X$ произвољно. Ако $x \in A$, по дефиницији директне слике $f(x) \in f[A]$, па по дефиницији инверзне слике $x \in f^{-1}[f[A]]$. Дакле, $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да $A \subseteq f^{-1}[g[A]]$ важи за све $A \subseteq X$. Довољно је да докажемо да је $f(x) = g(x)$, за све $x \in X$. Нека је $x \in X$ произвољно. Уочимо $A = \{x\}$. Тада је $g[A] = \{g(x)\}$. Како $x \in A$, по претпоставци следи да $x \in f^{-1}[g[A]]$. Према дефиницији инверзне слике $f(x) \in g[A] = \{g(x)\}$, тј. $f(x) = g(x)$. $\dashv$

4. Конструисати бијекцију између скупова $X = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $Y = \{3n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Решење. Проверите да је са $f(x) = 3(n/3)^2$ добро дефинисана бијекција $f : X \longrightarrow Y$. $\dashv$

5. На скупу $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$ следећом сликом дефинисан је модел $\mathbb{A}$ језика $\mathcal{L} = \{r\}$ ($\operatorname{ar} r = 2$):

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[d] & \beta \arrow[d, bend right] & \gamma \arrow[dl] \\
\delta & \varepsilon \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[u, bend right] & \eta
\end{tikzcd}$$

Записати формуле $F_a(x)$, за све $a \in A$, такве да $F_a(x)$ дефинише a.

Решење. На слици постоји јединствен подграф облика:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & \\ y & z \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

и положај сваког елемента у њему јединствено дефинише елементе $\alpha, \delta, \varepsilon$. Дакле формуле које дефинишу $\alpha, \delta, \varepsilon$ могу да буду:

$$F_\alpha(x) = \exists yz(r(x,y) \wedge r(z,x) \wedge r(z,y)); \qquad F_\delta(y) = \exists xz(r(x,y) \wedge r(z,x) \wedge r(z,y));$$
$$F_\varepsilon(z) = \exists xy(r(x,y) \wedge r(z,x) \wedge r(z,y)).$$

γ је јединствени елемент који нема улазну стрелицу, па га дефинише формула:

$$F_\gamma(x) = \forall y \neg r(y,x).$$

β је јединствени елемент који има улазну и излазну стрелицу из ε, које смо већ успели да дефинишемо, па је нпр:

$$F_\beta(x) = \exists y(F_\varepsilon(y) \wedge r(x,y) \wedge r(y,x)).$$

Коначно, η нема излазну стрелицу и има само једну улазну стрелицу. То можемо записати са:

$$F_\eta(x) = \forall y \neg r(x,y) \wedge \exists y[r(y,x) \wedge \forall z(r(z,x) \Rightarrow z = y)].$$

$\dashv$