Засниваење математике, Колоквијум *17. април 2013.*

1. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $A, \neg A \vdash B$.
2. Доказати: ако је A таутологија, тада у Лукашиевичевом рачуну важи $\vdash A$.
3. Доказати Канторову теорему: за сваки скуп X важи $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда и $\mathbb{M} = (D, s^{\mathbb{M}})_{s\in\mathcal{L}}$ модел језика $\mathcal{L}$. Ако је t терм језика $\mathcal{L}$, означимо са $V(t)$ скуп променљивих које се јављају у терму t.

   Нека је t терм и нека су $u, v : \mathrm{Var} \longrightarrow D$ две валуације, такве да је $u(x) = v(x)$, за све $x \in V(t)$. Доказати да је $\overline{u}(t) = \overline{v}(t)$.

   [Хинт. Доказ извести индукцијом по $|V(t)|$ и сложености терма t.]
5. Кажемо да је група G *уредива* ако постоји релација $<$ која линеарно уређује њене елементе тако за све $a, b, c \in G$ важи:

   $$\text{ако } a < b, \text{ тада } ac < bc \text{ и } ca < cb.$$

   Нека је G група чија је свака коначно генерисана подгрупа уредива.

   а) Конструисати теорију T_0 језика $\mathcal{L}_0 = \{\cdot, ^{-1}, e, <\}$ тако да важи: ако је $\mathbb{M} \vDash T$, тада је $\mathbb{M}$ уредива група.

   б) Конструисати теорију T језика $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{c_g \mid g \in G\}$ тако да важи: ако $\mathbb{M} \vDash T$, тада је $\mathbb{M}$ уредива група која садржи изоморфну копију групе G.

   в) Под претпоставком да постоји $\mathbb{M} \vDash T$, доказати да је G уредива.

   г) Доказати да је G уредива.

Засниваење математике, Колоквијум *17. април 2013.*

1. У Лукашиевичевом рачуну доказати: $A, \neg A \vdash B$.
2. Доказати: ако је A таутологија, тада у Лукашиевичевом рачуну важи $\vdash A$.
3. Доказати Канторову теорему: за сваки скуп X важи $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда и $\mathbb{M} = (D, s^{\mathbb{M}})_{s\in\mathcal{L}}$ модел језика $\mathcal{L}$. Ако је t терм језика $\mathcal{L}$, означимо са $V(t)$ скуп променљивих које се јављају у терму t.

   Нека је t терм и нека су $u, v : \mathrm{Var} \longrightarrow D$ две валуације, такве да је $u(x) = v(x)$, за све $x \in V(t)$. Доказати да је $\overline{u}(t) = \overline{v}(t)$.

   [Хинт. Доказ извести индукцијом по $|V(t)|$ и сложености терма t.]
5. Кажемо да је група G *уредива* ако постоји релација $<$ која линеарно уређује њене елементе тако за све $a, b, c \in G$ важи:

   $$\text{ако } a < b, \text{ тада } ac < bc \text{ и } ca < cb.$$

   Нека је G група чија је свака коначно генерисана подгрупа уредива.

   а) Конструисати теорију T_0 језика $\mathcal{L}_0 = \{\cdot, ^{-1}, e, <\}$ тако да важи: ако је $\mathbb{M} \vDash T$, тада је $\mathbb{M}$ уредива група.

   б) Конструисати теорију T језика $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{c_g \mid g \in G\}$ тако да важи: ако $\mathbb{M} \vDash T$, тада је $\mathbb{M}$ уредива група која садржи изоморфну копију групе G.

   в) Под претпоставком да постоји $\mathbb{M} \vDash T$, доказати да је G уредива.

   г) Доказати да је G уредива.