Заснивање математике, предрок 2019. *30. мај 2019.*

Име и презиме: ______________________________ Број индекса: ______________

1. (15п) На острву живе само два племена, Искрени и Дупли агенти. Искрени увек говоре истину. Дупли агенти лажу Дупле агенте, а говоре истину Искренима. Одредити ко су Искрени, а ко Дупли агенти.

A каже B-у: Ако је C Искрен, онда је D Дупли агент.

B каже C-у: D је Искрен, а A је Дупли агент.

C каже D-у: Тачно један од F и A је Дупли агент.

D каже E-у: A и F су Дупли агенти.

2. * (12п) Доказати природном дедукцијом: $\neg a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c),\ c \Rightarrow \neg a,\ \neg d \vee a \Rightarrow c,\ \neg d \ \vdash\ \neg b$.

3. * (10п) Заокружити тачна тврђења, а прецртати нетачна (тачно +2, нетачно −2, незаокружено 0).

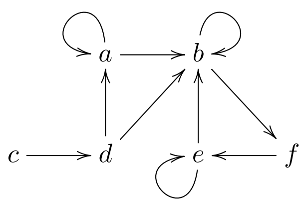
(а) За све скупове A, B и C важи: $(C \setminus A) \setminus (C \setminus B) = C \cap B$ ако и само ако $A \cap B \cap C = \emptyset$.
(б) Постоји коначан скуп A такав да за сваки (коначан) скуп B важи $|A| + 2|B| \geq 2|A \cup B| + |A \cap B|$.
(ц) За сваки скуп A постоји скуп B такав да за сваки скуп C важи $(A \triangle B) \cap C = (A \cap B) \triangle C$.
(д) За све скупове A и C постоји скуп B такав да $A \Delta (B \setminus C) = (A \cap C) \cup (A \setminus B)$.
(е) За све скупове A, B и C важи $\mathcal{P}(A \cap B) \smallsetminus \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \Delta C) \cup \mathcal{P}(B \Delta C)$.

4. * (10п) Заокружити тачна тврђења, а прецртати нетачна (тачно +2, нетачно −2, незаокружено 0).

(а) За све скупове X, Y, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ и НА функције $f : X \longrightarrow Y$ важи $f[A \cup f^{-1}[B]] = f[A] \cup B$.
(б) За све 1-1 функције $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$ важи $f[(g \circ f)^{-1}[Z]] = g^{-1}[Z]$.
(ц) За све непразне скупове X и функције $f, g : X \to X$ важи: ако је $g \circ f$ 1-1, онда је и g 1-1.
(д) За све непразне скупове A и бинарне релације $\rho, \sigma \subseteq A \times A$ важи: ако је $\sigma \cup \rho$ рефлексивна, онда је $\rho \subseteq (\sigma \circ \rho)$.
(е) За све непразне скупове A и бинарне релације $\rho, \sigma \subseteq A \times A$ важи: ако је $\rho \circ \sigma = \rho$, онда је $\sigma \subseteq \rho \circ \rho^{-1}$.

5. * (16п) На слици је дат модел језика $\mathcal{L} = \{q\}$ ($ar(q) = 2$ и q је представљено стрелицом). Које скупове дефинишу следеће формуле? (тачно +4, остало 0)

(1) $\forall y (q(x, y) \Rightarrow \neg q(y, y))$;
(2) $\exists y \exists z\, (q(x, y) \wedge q(x, z) \wedge \neg q(y, z))$;
(3) $\forall y \forall z\, ((q(x, y) \wedge q(x, z)) \Rightarrow q(y, z))$;
(4) $\exists y \forall z (y \neq z \Rightarrow (q(y, x) \wedge \neg q(z, x)))$;



Одговори:
(1) (2) (3) (4)

6. * (10п) Заокружити тврђења еквивалентна са 'X је пребројив скуп', прецртати она која нису (тачно +2, нетачно −2, незаокружено 0).

(а) Постоји 1-1 функција $f : \omega \to X$.
(б) Постоји НА функција $f : X \to \omega$ која није 1-1.
(в) Постоји 1-1 функција $f : \omega \to X$ која није НА.
(г) Свака НА функција $f : X \to X$ је 1–1.
(д) Свака 1-1 функција $f : X \to X$ је НА.

7. (20п) Експлицтно дефинисати бар једну $1-1$ функцију $f : 2^\omega \times 2^\omega \to 3^\omega$.

НАПОМЕНА. Задаци означени са * су условни: треба имати бар половину поена на сваком.